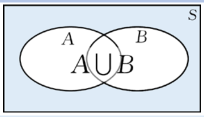
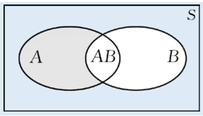
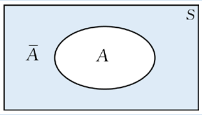
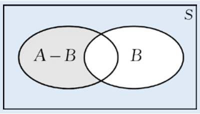
第 1 讲　随机事件与概率

知识梳理

一　事件关系与运算

1. 事件的运算及规律

① 四种事件运算类型

	符号	定义	Venn 图
和	$A\cup B$	$A\cup B=\{x:x\in A$ 或 $x\in B\}$	
积	$A\cap B$ AB	$AB=\{x:x\in A$ 且 $x\in B\}$	
逆	$\bar{A}$	$\bar{A}=\{x:x\notin A\}$	
差	$A-B$	$A-B=A\cap\bar{B}=\{x:x\in A$ 且 $x\notin B\}$	

② 事件运算的规律

规律名称	内容	
交换律	$A\cup B=B\cup A$	$AB=BA$
结合律	$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$	$(AB)C=A(BC)$
分配律	$(A\cup B)C=AC\cup BC$	$(AB)\cup C=(A\cup C)(B\cup C)$
德 · 摩根律	$\overline{\bigcup_{j=1}^{n}A_j}=\bigcap_{j=1}^{n}\overline{A_j}$	$\overline{\bigcap_{j=1}^{n}A_j}=\bigcup_{j=1}^{n}\overline{A_j}$

2. 事件之间的关系

	符号	定义	说明
包含	$B\subset A$	事件 B 发生一定导致事件 A 发生	B 是 A 的子事件（子集） Venn 图中 B 在 A 当中
相等	$A=B$	$B\subset A$ 且 $A\subset B$	——
互斥	$A\cap B=\varnothing$	——	Venn 图中二者没有重叠区域
独立	——	$P(AB)=P(A)P(B)$ 或 $P(A\mid B)=P(A)$	通过 定义 或 实际逻辑 判断

二　概率的运算性质

1.概率的基本运算性质

① 和事件

和事件的概率（双事件）

$$\boxed{P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)}$$

· 推论：若 $AB=\varnothing$，则 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$

若 $B=\overline{A}$，则 $P(\overline{A})=1-P(A)$

和事件的概率（三事件）

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(BC)-P(AC)+P(ABC)$$

② 积事件

积事件的概率

$$\boxed{A\text{ 和 }B\text{ 相互独立}\quad\Leftrightarrow\quad P(AB)=P(A)P(B)}$$

③ 差事件

差事件的概率

$$\boxed{P(A-B)=P(A)-P(AB)}$$

2.条件概率的基本运算性质

条件概率

$$\boxed{P(A\mid B)=\frac{P(AB)}{P(B)}}$$

① 乘法公式

条件概率乘法公式

$$\boxed{P(AB)=P(A)\cdot P(B\mid A)=P(B)\cdot P(A\mid B)}$$

② 全概率公式

全概率公式

$$\boxed{P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(B_i)P(A\mid B_i)}$$

· $B_1,\cdots,B_n$ 是 S 的一个划分

③ 贝叶斯公式

贝叶斯公式

$$\boxed{P(B_k\mid A)=\frac{P(B_kA)}{P(A)}=\frac{P(B_k)P(A\mid B_k)}{\sum_{j=1}^{n}P(B_j)P(A\mid B_j)}}$$

三 古典概型

1. 古典概型事件概率

古典事件概率
$\boxed{P(A)=\dfrac{A\text{ 样本数}}{S\text{ 样本数}}}$

2. 取样模型

- 盒子里有 N 个球，要取出 n 个球

取法	总样本数	说明
有放回地依次取出 n 次	N^n	相当于每次从 N 个球里选一个
无放回地依次取出 n 个	$\mathrm{A}_N^n=N!/(N-n)!$	相当于从 N 个球中选 n 个并排列
一次性取出 n 个	$\mathrm{C}_N^n=N!/[(n!)(N-n)!]$	——

- 事件样本数要**根据事件化为先后步骤**求排列组合

  如无放回依次取出时，里面有 m 个红球，要求第 3 次取出红球

  ① 第一步：从 m 个红球里选一个作为第 3 个球：C_m^1

  ② 第二步：从剩下 $N-1$ 个球里选择 $n-1$ 个：A_{N-1}^{n-1}

  则样本数为 $\mathrm{C}_m^1\mathrm{A}_{N-1}^{n-1}$

3. 抽签问题的结论

- 在无放回模型中，第 k 次取到特定球的概率与 k 无关，这使得我们可直接通过计算第 1 次的概率求解

题型解析

一　计算古典概型事件的概率

1.题型简述与解法

- 题干描述实际生活场景，且没有提供任何已知的概率
- 主要流程：求出所求事件的样本数和总样本数，相除后计算
- 计算样本数时需要灵活运用排列组合知识，将题目中的背景转换为熟悉的模型进行计算
- 如果发现计数需要复杂的分类讨论，不妨反过来求逆事件的样本数，可能有奇效

2.历年考试典型例题

例 1　（19—20 春夏）一盒中有 5 个球，其中 3 个红球，2 个白球，采用不放回抽样取 3 个球，则至少取到 2 个红球的概率为______________，第 2 次取到红球的概率为_______________.

解　① 由于“至少取到 2 个红球”没有对抽取顺序提出要求，因此可以视为一次性取出

套用到抽球模型，$N=5$，$n=3$，总样本数 $C_5^3=20$

“至少取到 2 个红球”包括“2 个红球 1 个白球”和“3 个红球”两种情况

“2 个红球 1 个白球”相当于“3 个红球中选 2 个 且 2 个白球中选 1 个”，样本数 $C_3^2C_2^1=6$

“3 个红球”相当于“3 个红球中选 3 个”再全排列，样本数 $C_3^3=1$

→ 该事件样本数 $6+1=7$，概率 $7/10=\boxed{0.7}$

② 由于“第 2 次取到红球”对顺序提出要求，因此视为不放回依次取出，总样本数 $A_5^3=60$

“第 2 次取到红球”相当于“3 个红球选 1 个 且 4 个球中选 2 个全排列”，样本数 $C_3^1A_4^2=36$

→ 该事件概率为 $36/60=0.6$

实际上就是抽签问题，直接使用结论：$3/5=\boxed{0.6}$

例 2　（18—19 秋冬）某小区有 a 个人申请小区停车位（$a\geq 3$），而小区的停车位只有 b 个（$0<b\leq a-2$）。管理者决定采用随机抽签方法确定停车位使用权。则排在第 3 位的抽签者抽中停车位的概率为____________；前三个人中恰好有一人抽中停车位的概率为_______________.

解　① 利用结论，第 3 位抽签抽中概率与第 1 位一致，即 $\boxed{b/a}$

② 由于“前三个人中恰好有一人抽中停车位”没有提出顺序要求，因此视为一次性抽取

总样本数 C_a^3，“前三个人中恰好有一人抽中停车位”相当于“从 b 张中签中选择 1 张”且“$a-b$ 张未中签中选择 2 张”，所以样本数 $C_b^1C_{a-b}^2$，因此概率 $\boxed{(C_b^1C_{a-b}^2)/C_a^3}$

二　计算抽象事件的概率

1. 题型简述与解法

- 题干直接使用 A B 等来表示事件，并提供已知概率）
- 盯住目标，利用概率公式将所求事件的概率转化为已知概率的表达式
- 需要熟练地由事件关系得到概率间的关系，初学者可借助韦恩图做题训练
- 遇到条件概率，可通过定义式转化为一般的概率，或直接利用条件概率性质

2. 历年考试典型例题

例 1　（19—20 **秋冬**）设 A,B 为两个随机事件，已知 $P(A)=0.45$， $P(A|B)=P(\overline{A}|\overline{B})=0.6$，则 A 与 B 是否独立？答：__________________；$P(B)=$ ___________________.

解　① 目标是判断 A 和 B 是否独立，等价于判断 $P(AB)=P(A)P(B)$ 或 $P(A|B)=P(A)$ 是否成立

而题干中直接就有 $P(A)=0.45$， $P(A|B)=0.6$，因此 $P(A|B)\neq P(A)$，即 $\boxed{\text{不独立}}$

② 方法一：将条件概率化为定义式

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=0.6 \rightarrow P(AB)=0.6P(B) \qquad (1)$$

$$P(\overline{A}|\overline{B})=\frac{P(\overline{A}\,\overline{B})}{P(\overline{B})}=\frac{P(\overline{A\cup B})}{1-P(B)}=\frac{1-P(A\cup B)}{1-P(B)}=\frac{1-P(A)-P(B)+P(AB)}{1-P(B)}=0.6 \qquad (2)$$

- （1） 及 $P(A)=0.45$ 代入 （2），得

$$\frac{0.55-0.4P(B)}{1-P(B)}=0.6\text{，解得 } P(B)=\boxed{0.25}$$

方法二：根据条件概率的性质

$$P(\overline{A}|\overline{B})=1-P(A|\overline{B})=0.6 \rightarrow P(A|\overline{B})=0.4$$

- 已知 $P(A|B)$ 和 $P(A|\overline{B})$，我们就能用全概率公式

$$P(A)=P(A|B)P(B)+P(A|\overline{B})P(\overline{B})$$

代入数据：　$0.45=0.6P(B)+0.4(1-P(B))$

解得 $P(B)=\boxed{0.25}$

例 2　（18—19 **春夏**）设 A,B,C 为三个随机事件，已知 A 发生时 B 必定发生， $P(A)=0.3$， $P(B)=0.4$， $P(A|C)=0.4$， $P(B|C)=0.5$， $P(C)=0.6$，则 $P(C|A)=$ ____________；$P(A\cup B\cup C)=$ ______________.

解　① 从条件概率的定义出发

$$P(C|A)=\frac{P(AC)}{P(A)}=\frac{P(A|C)P(C)}{P(A)}=\frac{0.4\times0.6}{0.3}=\boxed{0.8}$$

② “已知 A 发生时 B 必定发生” $\rightarrow$ $A\subset B$ $\rightarrow$ $A\cup B=B$，因此

$$P(A\cup B\cup C)=P(B\cup C)=P(B)+P(C)-P(BC)=P(B)+P(C)-P(B|C)P(C)=\boxed{0.7}$$

例 3 （15－16 **春夏**）设 A,B,C 是三个事件，$P(A)=a$，$P(B)=b$，$P(C)=c$.（1）若 A,B,C 相互独立，则 $P(\bar{B}\cup\bar{C}\,|\,AB)=$ ______；（2）若 $A\subset B$，且 B 与 C 不相容，则 $P(\bar{B}\cup\bar{C}\,|\,AB)=$ ______.

解 两问求的是同一个概率，形式复杂，首先简化它：

$$P(\bar{B}\cup\bar{C}\,|\,AB)=\frac{P((\bar{B}\cup\bar{C})AB)}{P(AB)}=\frac{P(AB\bar{B}\cup AB\bar{C})}{P(AB)}=\frac{P(AB\bar{C})}{P(AB)}$$

（1）A,B,C 相互独立 → AB 与 C 独立

$$P(\bar{B}\cup\bar{C}\,|\,AB)=\frac{P(AB\bar{C})}{P(AB)}=P(\bar{C})=1-P(C)=1-c$$

（2）$A\subset B$ → $AB=A$，则

$$P(\bar{B}\cup\bar{C}\,|\,AB)=\frac{P(AB\bar{C})}{P(AB)}=\frac{P(A\bar{C})}{P(A)}$$

B 与 C 不相容 且 $A\subset B$ → A 与 C 也不相容 → $A\subset\bar{C}$ → $A\bar{C}=A$，因此

$$P(\bar{B}\cup\bar{C}\,|\,AB)=\frac{P(AB\bar{C})}{P(AB)}=\frac{P(A\bar{C})}{P(A)}=\frac{P(A)}{P(A)}=1$$

例 4 （14－15 **秋冬**）设随机事件 A 与 B 独立，$P(A)=0.4$，$P(A\cup B)=0.64$，则 $P(B)=$ ________，$P(\bar{A}\,|\,A\cup B)=$ ________.

解 ① $P(A\cup B)=0.64$ → 和事件公式：$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0.64$

A 与 B 独立 → $P(AB)=P(A)P(B)$ → $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A)P(B)=0.64$

代入 $P(A)=0.4$，解得 $P(B)=0.4$

② $$P(\bar{A}\,|\,A\cup B)=\frac{P(\bar{A}(A\cup B))}{P(A\cup B)}=\frac{P(\bar{A}B)}{P(A\cup B)}=\frac{P(\bar{A})P(B)}{P(A\cup B)}=\frac{0.6\times0.4}{0.64}=0.375$$

三 全概率与贝叶斯

1.题型简述与解法

- 题干描述的是实际生活场景，并且提供已知的概率，求全概率、贝叶斯事件
- 关键在于正确用字母描述事件，并将已知的条件转化为数学语言，主要靠日常逻辑
- 列全概率时，要确保划分与条件概率一一对应，不要有漏掉的划分事件

2.历年考试典型例题

例 1 （19－20 **春夏**）设某地区居民患有某种疾病的概率为 0.001，用于疾病检测的方法存在误判，设患病者检测结果呈阳性的概率为 0.95，未患病者检测为阳性的概率为 0.002.若在该地区随机选一人进行检测，结果呈阳性，求 TA 的确患病的概率；若对 TA 独立进行两次检测，且假设两次检测

都处于相同的状态，如果结果都是阳性，求 TA 患病的概率。(保留 3 位小数)

解 （1）设事件 A 为“检测阳性”，事件 B 为“患病”，则事件 $\overline{B}$ 为“不患病”

“患有某种疾病的概率为 0.001” → $P(B)=0.001$，$P(\overline{B})=1-P(B)=0.999$

“患病者检测结果呈阳性的概率为 0.95” → $P(A|B)=0.95$

“未患病者检测为阳性的概率为 0.002” → $P(A|\overline{B})=0.02$

“结果呈阳性，求 TA 的确患病的概率” → $P(B|A)$

$\therefore\ P(A)=P(A|B)P(B)+P(A|\overline{B})P(\overline{B})=0.95\times0.001+0.002\times0.999=$

$$\therefore\ P(B|A)=\frac{P(A|B)P(B)}{P(A|B)P(B)+P(A|\overline{B})P(\overline{B})}=\frac{0.95\times0.001}{0.95\times0.001+0.002\times0.999}=\boxed{0.322}$$

（2）设事件 A_i 为“第 i 次进行检测为阳性”，则 A_1、A_2 相互独立

“两次检测都是阳性” → $P(A_1A_2)=P(A_1)P(A_2)=P^2(A)$（第 1 问可求出）

“患病者且 2 次检测都是阳性” →

$$P(A_1A_2B)=P(A_1A_2|B)P(B)=P(A_1|B)P(A_2|B)P(B)$$

“2 次检测都是阳性，求 TA 患病的概率” → $P(B|A_1A_2)$

$$\therefore\ P(B|A_1A_2)=\frac{P(A_1A_2|B)P(B)}{P(A_1A_2)}=\frac{P(A_1|B)P(A_2|B)P(B)}{P^2(A)}=\boxed{0.996}$$

例 8 （**17－18 春夏**）小王喜欢玩某款一对一对战游戏，该游戏会根据玩家自身的等级分随机匹配等级分相近的玩家。假设在一局中小王遇到等级分高于，等于，低于自己的玩家的概率分别为 0.4，0.2，0.4，遇到等级分高的玩家，小王胜，平，负的概率分别 0.3，0.3，0.4，遇到等级分相同的玩家，小王胜，平，负的概率分别 0.4，0.4，0.2，遇到等级分高的玩家，小王胜，平，负的概率分别 0.5，0.3，0.2.

（1）求在一局中小王胜的概率；

（2）若已知小王胜了一局，求此局对手是等级分高的玩家的概率；

解 （1）设遇到等级分高中低的玩家分别为 $A_1A_2A_3$，胜平负分别是 $B_1B_2B_3$，则小王胜的概率

$$P(B_1)=P(A_1)P(B_1|A_1)+P(A_2)P(B_1|A_2)+P(A_3)P(B_1|A_3)$$

$$=0.4\times0.3+0.2\times0.4+0.4\times0.5=0.4$$

（2）“已知小王胜了一局，此局对手是等级分高的玩家” → $P(A_1|B_1)$

$$\therefore\ P(A_1|B_1)=\frac{P(A_1)P(B_1|A_1)}{P(B_1)}=\frac{0.4\times0.3}{0.4}=0.3$$